

箇中玄機

數學在中國的發展源遠流長，成就輝煌。歷代有不少數學典籍均記載了精彩的數學論題和概念，由於作者沒有詳細解釋當中的解題方法，一些出色的數學家便為這些典籍作註釋，才展示出中國古代數學解難方法的玄機。

請閱讀以下兩題出自中國數學著作的數學題，並回答問題：

1. 雞兔同籠

出處：《孫子算經 卷下》 第三一題

問題：在籠內有雞和兔兩種動物，共有三十五個頭和有九十四隻腳，問雞、兔各有多少隻？

解法：將腳的數目除以 2，所得的結果和頭的數目的相差，就是兔的數目；再用頭的數目減去所算出的兔的數目，便得出雞的數目。

(1a) 請列出以上解法的計算步驟，然後計算出雞、兔各有多少隻，並驗算結果。

(1b) 現把題目更改如下：

在籠內有雞和兔兩種動物，共有四十二個頭和一百三十四隻腳。問雞、兔各有多少隻？

試再用以上解法，算出雞、兔的數目，並驗算結果。

數學辯論

樣本題目 (17)

相信你也發現到以上的解法很快捷有效，但為何依照這個方法就能夠正確找到雞和兔的數目呢？請解答以下幾個有助你思考的問題，然後從中找出上述方法如何成功解決問題的玄機。

- (1c) 根據以上(1b)方框內的資料，但假設兔子只有兩隻腳，若把腳的數目除以 2，結果將會是甚麼呢？這結果可以表示甚麼呢？
- (1d) 腳的數目除以 2 後所算出的結果與實際雞兔的總數有差異，為什麼這差異是兔的數目呢？
- (1e) 為什麼以上的計算方法能成功解決「雞兔同籠」的問題？箇中玄機是什麼呢？試解釋。

數學辯論

樣本題目 (17)

2. 盈不足

出處：《九章算術 卷七》 第一題

問題：有一批人合資購買一批貨品，若每人付 8 元，會餘下 3 元（這情況稱為「有餘」）；若每人付 7 元，尚欠 4 元（這情況稱為「尚欠」）。問人數共有多少？貨品總值又是多少？

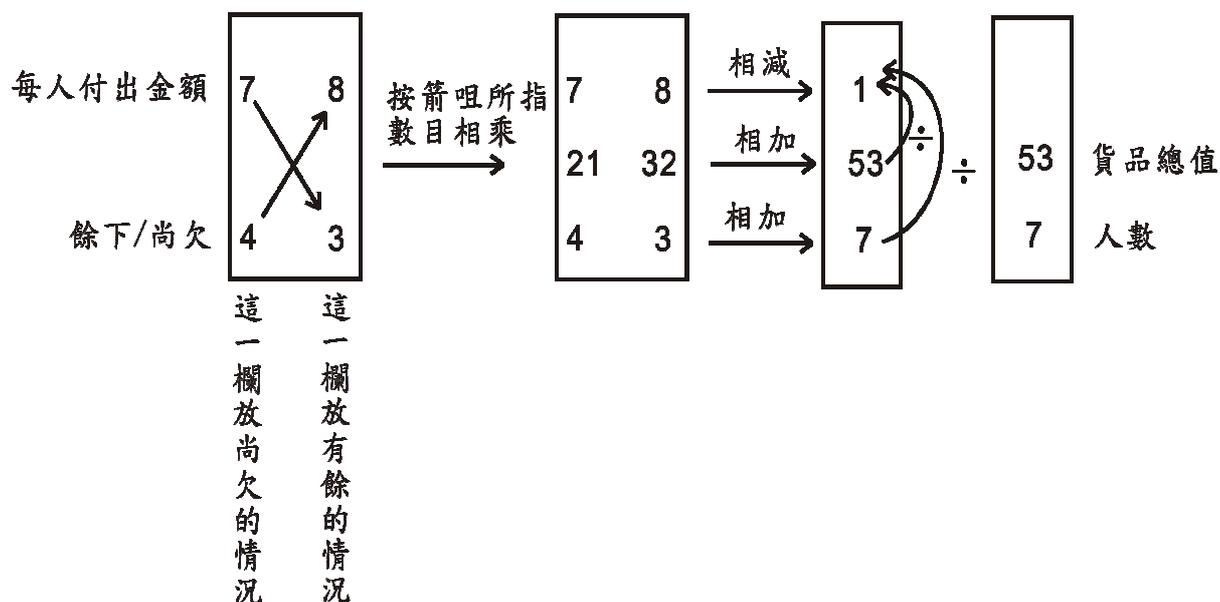
解法：同學可使用下圖來理解以下由《九章算術》書內提供的解法。

第一步：先將「尚欠」情境中，每人所付出的金額及尚欠的款額放於第一欄；然後把「有餘」情境中，每人所付出的金額及餘下的款額放於另一欄；

第二步：按圖中箭咀所指的數目相乘，將結果放於中間；

第三步：將第一行的兩數相減，第二行和第三行則兩數相加；

第四步：將第二個數字除以第一個數字便得出貨品總值；將第三個數字除以第一個數字便得出人數。



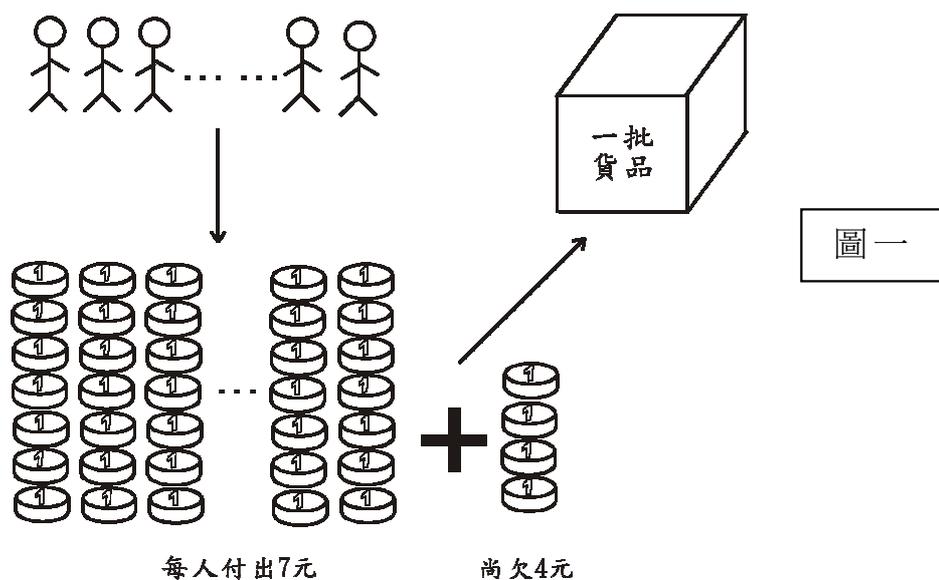
(2a) 請根據以上的解法來計算出人數和貨品總值各有多少，然後驗算結果。

數學辯論

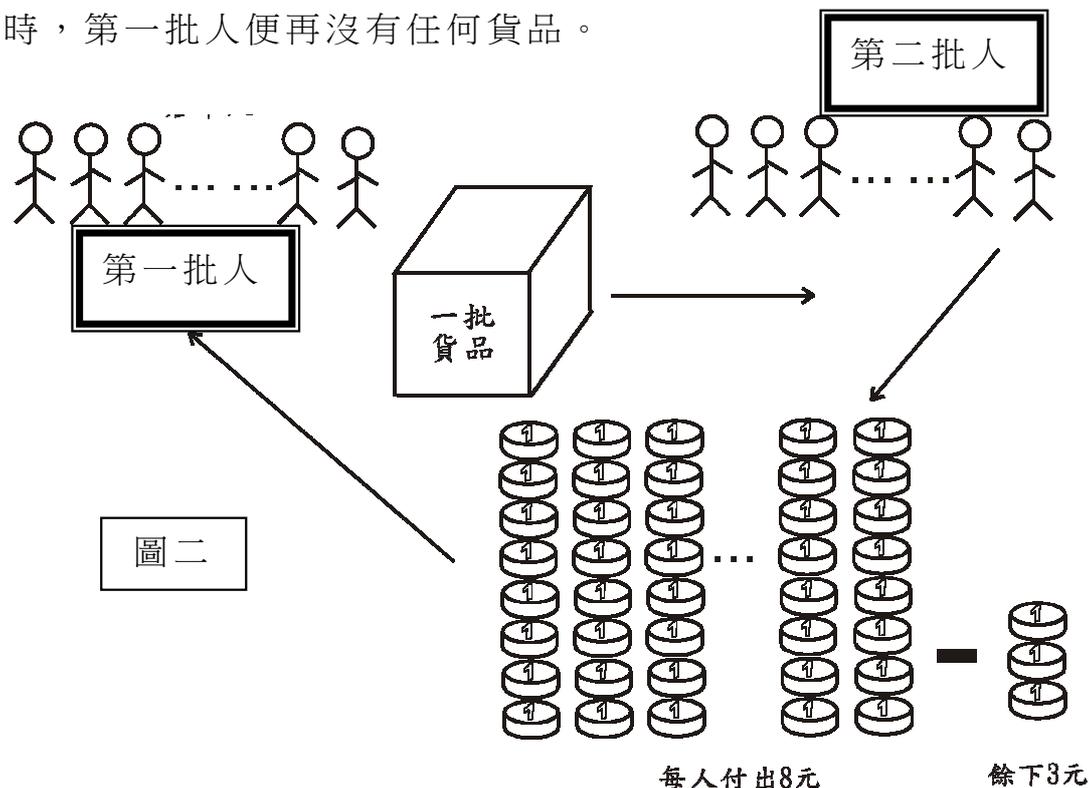
樣本題目 (17)

古人劉徽曾為以上解法作註解，我們可以從他的註解找出上述解法的箇中玄機。首先，劉徽將問題的解法分作兩部分，第一部分的解法如下，我們可以從中找出人數，他的解法如下：

有一批人，他們每人付出 7 元，只要再加上 4 元(即尚欠 4 元)，便可購買一批貨品 (圖一)。



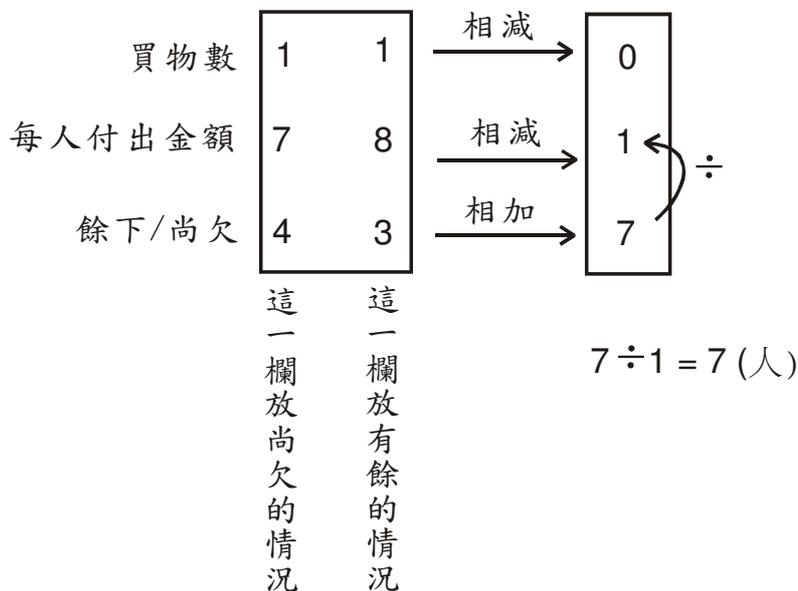
現有第二批人，人數與以上第一批人相同，若他們每人付出 8 元，只要減去 3 元(即餘下 3 元)，便可向第一批人購買該批貨品 (圖二)。這時，第一批人便再沒有任何貨品。



數學辯論

樣本題目 (17)

(2b) 既然兩批人的人數相等，那麼我們可以假設第二批人中每人都付 8 元給第一批人，這樣的話，第一批人中每人多取得了多少元？這個結果與以下劉徽的解法中那一個數值相符合？

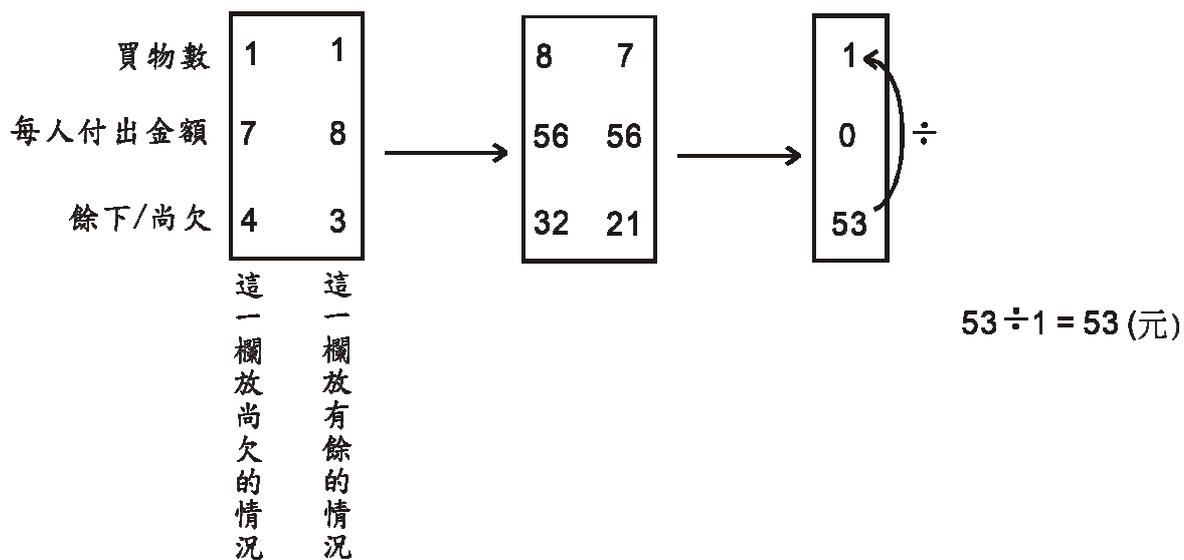


- (2c) 在劉徽的解法中，他把第三行的兩個數字加起來，計算出「7」這一個數值。若配合以上(2b)的情景，這個「7」代表甚麼？
- (2d) 試解釋為何「 $7 \div 1$ 」就是「盈不足」問題中購買貨品的人數？

數學辯論

樣本題目 (17)

此外，劉徽用以下方式來計算貨品總值：



(2e) 為什麼以上方法能成功計算出貨品總值？試解釋，

(2f) 基於以上題(2b)至(2e)的分析，你能否說明為何題(2a)所用的方法(即原先《九章算術》書內的解法)可以將人數及貨品總值計算出來？